UNIDAD DE APRENDIZAJE I

Saberes procedimentales	Saberes declarativos	
1. Interpreta y utiliza correctamente el lenguaje simbólico para el manejo de expresiones algebraicas. 2. Identifica operaciones básicas con expresiones algebraicas.	A	Lenguaje algebraico.
	B	Expresiones algebraicas polinomiales y su clasificación.
	C	Símbolos de agrupación. Jerarquización.
	D	Algoritmos de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación y división)

A Lenguaje algebraico.

En lenguaje algebraico nace en la civilización musulmán en el período de Al–khwarizmi, al cual se le considera el padre del álgebra. El lenguaje algebraico consta principalmente de las letras de alfabeto y algunos vocablos griegos. La principal función de lenguaje algebraico es estructurar un idioma que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro de la aritmética, por ejemplo: si queremos sumar dos números cualesquiera basta con decir a + b; donde la letra a indique que es un número cualquiera de la numeración que conocemos, b de la misma manera que a significa un número cualquiera de la numeración.

También el lenguaje algebraico ayuda mantener relaciones generales para razonamiento de problemas a los que se puede enfrentar cualquier ser humano en la vida cotidiana.

Lenguaje Algebraico.

Para poder manejar el lenguaje algebraico es necesario comprender lo siguiente:

- Se usan todas las letras del alfabeto.
- Las primeras letras del alfabeto se determinan por regla general como constantes, es decir, cualquier número o constante como el vocablo pi.
- Por lo regular las letras X., Y y Z se utilizan como las incógnitas o variables de la función o expresión algebraica.

Operaciones con Lenguaje Algebraico

Aquí se presentan los siguientes ejemplos, son algunas de las situaciones más comunes que involucran los problemas de matemáticas con lenguaje algebraico; cualquier razonamiento extra o formulación de operaciones con este lenguaje se basa estrictamente en estas definiciones:

- un número cualquiera se puede denominar con cualquier letra del alfabeto, por ejemplo:

a = un número cualquiera
b = un número cualquiera
c = un número cualquiera
... y así sucesivamente con todos los datos del alfabeto.

- la suma de dos números cualesquiera

a+b = la suma de dos números cualesquiera
x+y = la suma de dos números cualesquiera

- la resta de dos números cualesquiera

a-b = la resta de dos números cualesquiera
m-n = la resta de dos números cualesquiera

- la suma de dos números cualesquiera menos otro número cualquiera

a-b+c =la suma de dos números cualesquiera menos otro número cualquiera

- el producto de dos números cualesquiera

ab = el producto de dos números cualesquiera

- el cociente de dos números cualesquiera (la división de dos números cualesquiera)

a/b= el cociente de dos números cualesquiera

- la semisuma de dos números cualesquiera

(a+b)/2= la semisuma de dos números cualesquiera

- el semiproducto de dos números cualesquiera

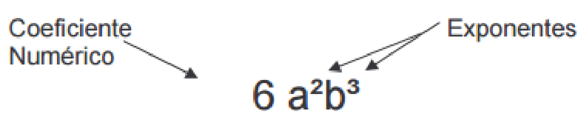
(ab)/2= el semiproducto de dos números cualesquiera

Ejemplo Los siguientes son ejemplos de las expresiones algebraicas más usadas, en forma verbal y escrita:

La suma de dos números	a + b
La resta o diferencia de dos números	x – y
El producto de dos números	ab
El cociente de dos números	x/y
El cociente de la suma de dos números, sobre la diferencia	a+b/a-b
El doble de un número	2x
El doble de la suma de dos números	2(a+b)
El triple de la diferencia de dos números	3(x-y)
La mitad de un número	x/2
La mitad de la diferencia de dos números	(x-4)/2
El cuadrado de un número	x^2
El cuadrado de la suma de dos números	$(x+4)^2$
El triple del cuadrado de la suma de dos números.	$3(x+4)^2$
La suma de 3 números	a+b+c
La semi suma de dos números.	(a+b)/2

B Expresiones Algebraicas Polinomiales y su Clasificación

Expresión algebraica es la forma de las matemáticas que escribimos con letras, números, potencias y signos.



Al número le llamamos coeficiente, a la letra o letras les llamamos parte literal y al exponente le llamamos grado.

Valor número de una expresión algebraica.

Para hallar el valor numérico de una expresión algebraica sustituimos las letras por el valor dado y hacemos las operaciones que se nos indiquen.

Clasificación de expresiones algebraicas:

1ª- Si una expresión algebraica está formada por un solo término se llama monomio. Ej: $3x^2$

2ª- Toda expresión algebraica que esté formada por dos términos se llama binomio. Ej: $2x^2 + 3xy$

3ª- Toda expresión algebraica formada por tres términos se llama trinomio. Ej: $3x^2 - 5xy + 7xy^3$

4ª- Si la expresión algebraica tiene varios términos se llama polinomio.

Polinomio es un conjunto de monomios. Tendremos en cuenta lo siguiente:

1º- Si está ordenado. Para ordenar un polinomio, colocamos los monomios de mayor a menor, según su grado.

2º- Si está completo. Completar un polinomio es añadir los términos que falten poniendo de coeficiente 0.

3º- Cuál es su grado. El grado de un polinomio es el mayor exponente de sus términos.

Expresiones algebraicas equivalentes	Dos o más expresiones algebraicas son equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico.

C Símbolos de agrupación y jerarquización

Símbolos y términos específicos

Entre los símbolos algebraicos se encuentran números, letras y signos que representan las diversas operaciones aritméticas. Los números son, por supuesto, constantes, pero las letras pueden representar tanto constantes como variables. Las primeras letras del alfabeto se usan para representar constantes y las últimas para variables.

Operaciones y agrupación de símbolos

La agrupación de los símbolos algebraicos y la secuencia de las operaciones aritméticas se basan en los símbolos de agrupación, que garantizan la claridad de lectura del lenguaje algebraico. Entre los símbolos de agrupación se encuentran los paréntesis ( ), corchetes [ ], llaves { } y rayas horizontales —también llamadas vínculos— que suelen usarse para representar la división y las raíces, como en el siguiente ejemplo:

Los símbolos de las operaciones básicas son bien conocidos de la aritmética: adición (+), sustracción (-), multiplicación (×) y división (:). En el caso de la multiplicación, el signo `×' normalmente se omite o se sustituye por un punto, como en a ·b. Un grupo de símbolos contiguos, como abc, representa el producto de a, b y c. La división se indica normalmente mediante rayas horizontales. Una raya oblicua, o virgulilla, también se usa para separar el numerador, a la izquierda de la raya, del denominador, a la derecha, en las fracciones. Hay que tener cuidado de agrupar los términos apropiadamente. Por ejemplo,

ax+ b/c- dy indica que ax y dy son términos separados, lo mismo que b/c , mientras que (ax +b)/(c -dy) representa la fracción:

Prioridad de las operaciones

Primero se hacen las multiplicaciones, después las divisiones, seguidas de las sumas y las restas. Los símbolos de agrupación indican el orden en que se han de realizar las operaciones: se hacen primero todas las operaciones dentro de un mismo grupo, comenzando por el más interno

D Operaciones algebraicas

Suma y resta algebraica.

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se suprimen los símbolos de agrupación y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo

Sumar $(x^3 + 3x^2y - 4x^2y^3) + (-4x^3 + 2x^2y + 5x^2y^3) =$

Solución: Se eliminan los símbolos de agrupación y se procede a reducir términos semejantes.

$x^3 + 3x^2y - 4x^2y^3 - 4x^3 + 2x^2y + 5x^2y^3 = -3x^3 + 5x^2y + x^2y^3 =$

$$\boldsymbol{-3x^3 + x^2y^3 + 5x^2y}$$

Para restar dos o más expresiones algebraicas se suprimen los símbolos de agrupación haciendo la operación correspondiente de signos en el caso que corresponda, enseguida se reducen los términos semejantes.

Ejemplo

Restar: $(7x^2y - 3xy + 2y^2) - (-3x^3 + 9x^2y + 6xy - y^2) =$

Al eliminar los paréntesis se debe hacer la operación de signos correspondiente:

$7x^2y - 3xy + 2y^2 + 3x^3 - 9x^2y - 6xy + y^2 = -2x^2y - 9xy + 3y^2 + 3x^3 =$

$$\boldsymbol{3x^3 - 2x^2y - 9xy + 3y^2}$$

Multiplicación algebraica.

Antes de conocer el procedimiento para la multiplicación algebraica se deben conocer las propiedades de los exponentes en esta operación.

Propiedades de los exponentes.

Si multiplicamos dos factores que tengan la misma base, el resultado será la base en común y el exponente será la suma de los exponentes de dichos factores.

Regla de multiplicación.

$$\boldsymbol{(a^m)(a^n) = a^{m+n}}$$

Regla para exponentes.

$$\boldsymbol{(a^m)^n = (a^{m*n})}$$

Tomando en cuenta y habiendo entendido estas dos reglas, procedemos a describir el procedimiento para resolver multiplicaciones algebraicas.

Multiplicación de un monomio por otro monomio.

Al multiplicar un monomio por otro monomio se procede a multiplicar primero signo por signo (tomando como base la ley de signos), en seguido coeficiente por coeficiente y por último variable por variable, utilizando las reglas descritas anteriormente.

Ejemplo

$(-4x^2y^2)\ (-5x^3y^2z^4) =\ (-)(-)\ (4)(5)(x^2)(x^3)(y^2)(y^2)(z^4) =$

$$+\mathbf{20}\boldsymbol{x^5y^4z^4}$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio.

En esta ocasión se procede a multiplicar el monomio por cada término del polinomio, tomando en cuenta el mismo procedimiento de la multiplicación de un monomio por otro monomio.

Ejemplo

$(-2a^4b^2c^3d^5)\ (-3ab^3 + 5ac^2d^3 - 2c^3d^3 +\ a^2c^2d)$=

$(- * -)(2 * 3)(a^4 * a)(b^2 * b^3)(c^3d^5); (- * +)(2 * 5)(a^4 * a)(b^2)(c^3 * c^2)(d^5 * d^3); (- * -)(2 * 2)(a^4)(b^2)(c^3 * c^3)(d^5 * d^3) =$

$$\boldsymbol{+6a^5b^5c^3d^5 - 10a^5b^2c^5d^8 + 4a^4b^2c^6d^8}$$

Multiplicación de un polinomio por otro polinomio.

Se obtiene multiplicando cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio y al final se reducen los términos semejantes.

Para la resolución de estas multiplicaciones se puede utilizar el procedimiento de una multiplicación aritmética, solo que el orden es de izquierda a derecha y los resultados se acomodan en columnas de términos semejantes y se reducen en términos semejantes.

División algebraica.

Reglas de la división.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

División de un monomio entre otro monomio.

Para dividir un monomio entre otro monomio, se procede a dividir primero signo entre signo (tomando como base la ley de signos), en seguida coeficiente entre coeficiente (si la división es exacta se nota el valor, si no lo es, se escribe en forma de fracción simplificada) y por último variable entre variable, utilizando las reglas descritas anteriormente.

División de un polinomio entre un monomio.

En esta división se divide cada término del polinomio entre el monomio, de la misma manera descrita en el apartado anterior.

División de un polinomio entre otro polinomio.

El algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio es el siguiente:

1. Se ordenan los términos del dividendo y del divisor con respecto a los exponentes de la primera literal respecto al orden alfabético del mayor al menor (para los término no existentes el coeficiente es cero).
2. Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y el resultado será nuestro primer cociente.

3. El cociente se multiplica por cada término del divisor y se acomoda con el signo contrario por debajo de su término semejante del dividendo y se hace la operación correspondiente.
4. Se repiten los pasos anteriores hasta que el exponente de la variable del término del dividendo sea menor que el del divisor o hasta que el residuo sea cero.

Ejercicios

Suma.

1. $3a+2b-c; 2a+3b+c$
2. $7a-4b+5c;\ -7a+4b-6c$
3. $9x-3y+5;\ -x-y+4;\ -5x+4y-9$
4. $-7x-4y+6z; 10x-20y-8z;\ -5x+24y+2z$
5. $ab+bc+cd;\ -8ab-3bc-3cd; 5ab+2bc+2cd$
6. $-am+6mn-4s; 6s-am-5mn;\ -2s-5mn+3am$
7. $8a+3b-c; 5a-b+c;\ -a-b-c; 7a-b+4c$
8. $6m^{a+1}-7m^{a+2}-5m^{a+3};\ 4m^{a+1}-7m^{a+2}-m^{a+3};\ -5m^{a+1}+3m^{a+2}+12m^{a+3}$
9. $m^2+n^2;\ -3mn+4n^2;\ -5m^2-5n^2$
10. $x^3+xy^2+y^3;\ -5x^2y+x^3-y^3;\ 3x^3-4xy^2-5y^3$
11. $-8a^2m+6am^2-m^3; a^3-5am^2+m^3; -4a^3+4a^2m-3am^2; 7a^2m-4am^2-6$
12. $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2;\ -\frac{2}{5}xy+\frac{1}{6}y^2;\ \frac{1}{10}xy+\frac{1}{3}y^2$
13. $x^4-x^2+5;\ \frac{2}{3}x^2-\frac{3}{8}x-3;\ -\frac{3}{5}x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{4}x$

Resta.

1. $a+b\ restar\ a-b$
2. $2x-3y\ restar-x+2y$
3. $8a+b\ restar-3a+4$
4. $x^2-3x\ restar-5x+6$
5. $x^2+y^2-3xy\ restar\ -y^2+3x^2-4xy$
6. $a+b+c-d\ restar-a-b+c-d$
7. $5m^3-9n^3+6m^2n-8mn^2\ restar\ 14mn^2-21m^2n+5m^3-18$
8. $a^x+a^{x+1}-a^{x+2}\ restar\ 5a^x-6a^{x+1}-a^{x+2}$
9. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\ restar\ \frac{4}{5}a+\frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$

Signos de agrupación.

1. $2x+\{-5x-[-2y+(-x+y)]\}$
2. $7m^2-\{-[m^2+3n-(5-n)-(-3+m^2)]\}-(2n+3)$
3. $2a-(-4a+b)-\{-[-4a+(b-a)-(-b+a)]\}$

Multiplicación.

1. $ab\ por-ab$
2. $2x^2\ por-3x$
3. $-4a^2b\ por-ab^2$
4. $-4m^2 por-5mn^2p$
5. $-15x^4y^3\ por-16a^2x^3$
6. $a^m\ por\ a^{m+1}$
7. $-x^a\ por-x^{a+2}$
8. $-3a^{n+4}b^{n+1}\ por-4a^{n+2}b^{n+3}$
9. $\frac{1}{2}a^2\ por\ \frac{4}{5}a^3b$
10. $-\frac{3}{7}m^2n\ por-\frac{7}{14}a^2m^3$

División:

1. $-23\ entre\ 8$
2. -63 entre -7
3. $-5a^2\ entre-a$
4. $14a^3b^4\ entre-2ab^2$
5. $-5m^2n\ entre\ m^2n$
6. $-8a^2x^3\ entre\ -8a^2x^3$
7. $-108a^7b^6c^8\ entre\ -20b^6c^8$
8. $a^{m+3}\ entre\ a^{m+2}$
9. $2x^{a+4}\ entre\ -x^{a+2}$
10. $-7x^{m+3}y^{m-1}\ entre\ -8x^4y^2$
11. $\frac{1}{2}x^2\ entre\ \frac{2}{3}$

11. $\frac{5}{6}a^m b^n \; por - \frac{3}{10}ab^2c$ 12. $(a)(-3a)(a^2)$ 13. $(3x^2)(-x^3y)(-a^2x)$ 14. $\left(\frac{1}{2}x^3\right)\left(-\frac{2}{3}a^2x\right)\left(-\frac{3}{5}a^4m\right)$ 15. $3x^3 - x^2 \; por - 2x$ 16. $a^m - a^{m-1} + a^{m-2} \; por - 2a$ 17. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6 \; por \; -4x^2$ 18. $a + 3 \; por \; a - 1$ 19. $x + 5 \; por \; x - 4$ 20. $-a - 2 \; por - a - 3$ 21. $3x - 2y \; por \; y + 2x$ 22. $8n - 9m \; por \; 4n + 6m$ 23. $x^2 + xy + y^2 \; por \; x - y$ 24. $a^2 + b^2 + 2ab \; por \; a + b$ 25. $m^4 + m^2n^2 + n^4 \; por \; m^2 - n^2$ 26. $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \; por \; 2x + 3$ 27. $a^x - a^{x+1} + a^{x+2} \; por \; a + 1$ 28. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b \; por \; \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$ 29. $4(a + 5)(a - 3)$ 30. $3a^2(x + 1)(x - 1)$	12. $-\frac{3}{5}a^3b \; entre - \frac{4}{5}a^2b$ 13. $\frac{2}{3}a^xb^m \; entre - \frac{3}{5}ab^2$ 14. $a^2 - ab \; entre \; a$ 15. $3a^3 - 5ab^2 - 6a^2b^3 \; entre - 2a$ 16. $4x^8 - 10x^6 - 5x^4 \; entre \; 2x^3$ 17. $8m^9 - 10m^7n^4 - 20m^5n^6 +$ $12m^3n^8 \; entre \; 2m^2$ 18. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x \; entre \; \frac{2}{3}x$ 19. $\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{4}a \; entre - \frac{1}{4}a$ 20. $a^2 + 2a - 3 \; entre \; a + 3$ 21. $x^2 + 15 - 8x \; entre \; 3 - x$ 22. $6x^2 - xy - 2y^2 \; entre \; y + 2x$ 23. $x^4 - 9x^2 + 3 + x \; entre \; x + 3$ 24. $5n^2 - 11mn + 6m^2 \; entre \; m - n$ 25. $32n^2 - 54m^2 + 12mn \; entre \; 8n - 9m$